ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДУ

XII. Лінійні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$ay''+by'+cy=r(x)$$

Метод прогнозування

$$y=y_j+y_p$$

КРОК 1: Розв’язуємо однорідне рівняння.

$ay''+by'+cy=0$

$ar^2+br+c=0$

$\Delta=?$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
r_1, r_2	r_0	$r_1=\alpha-\beta i$ $r_2=\alpha+\beta i$
$y_j=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$	$y_j=C_1e^{r_0x}+C_2xe^{r_0x}$	$y_j=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

Маємо однорідний розчин: y_j

ЕТАП 2: Ми знаходимо «передбачене рішення».

Враховуємо $r(x)$ з рівняння $ay''+by'+cy=r(x)$ і визначаємо загальний вигляд y_p

$r(x)$	y_p
ПОЛІНОМ	ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ
ПОЛІНОМ $\cdot e^{ax}$	(ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ) $\cdot e^{ax}$
ПОЛІНОМ $\cdot\sin ax$ + ПОЛІНОМ $\cdot\cos ax$	(ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ) $\cdot\sin ax$ + (ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ) $\cdot\cos ax$
ПОЛІНОМ $\cdot e^{ax}\sin bx$ + ПОЛІНОМ $\cdot e^{ax}\cos bx$	(ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ) $\cdot e^{ax}\sin bx$ + (ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПОЛІНОМУ ТОГО СТУПЕНЯ) $\cdot e^{ax}\cos bx$

Із загального вигляду y_p обчислюємо похідну і похідну другого порядку $y_p{}', y_p{}''$, вставляємо в рівняння $ay''+by'+cy=r(x)$ і визначаємо константи загального вигляду y_p, порівнюючи поліноми.

Ми маємо передбачене рішення: y_p

Одп. $y=y_j+y_p$

<u>Метод варіювання констант</u>

$$ay''+by'+cy=r(x)$$

КРОК 1: Розв'язуємо однорідне рівняння (як вище).

Маємо однорідне рішення: y_j

У цьому рішенні ми «змінюємо константи» і маємо: $y=C_1(x)\cdot\square+C_2(x)\cdot\Delta$

КРОК 2: Створюємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\square+C_2'(x)\cdot\Delta=0 \\ C_1'(x)\cdot\square'+C_2'(x)\cdot\Delta'=\dfrac{r(x)}{a} \end{cases}$$

Розв'язуємо її (система Крамера), визначаємо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ вставляємо їх у співвідношення, отримані на КРОЦІ 1 $y=C_1(x)\cdot\square+C_2(x)\cdot\Delta$, і маємо відповідь.

XIII. Рівняння, зведене до порядку першого типу

Інтегруємо рівняння $y''=(\dots)$ з обох сторін $\quad F(x,y'')=0$

XIV. Рівняння, зведене до порядку першого типу

Підставляємо $p=y'$. $\quad F(x,y',y'')=0$

XV. Рівняння, зведене до порядку першого типу

Підставляємо $u(y)=y'$. $\quad F(y,y',y'')=0$

Підставлена функція є функцією змінної y.