ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

I. Роздільні рівняння

Перетворюємо так, щоб отримати:

$$\left(związek\ z\ y\right)\cdot dy = \left(związek\ z\ x\right)\cdot dx \qquad /\int$$

$$\int\left(związek\ z\ y\right)\cdot dy = \int\left(związek\ z\ x\right)\cdot dx$$

$\downarrow$

Рішення

II. Рівняння типу $y' = f\left(ax+by+c\right)$

Підставляємо: $t = ax+by+c$, визначаємо y' і переходимо до рівняння I типу (з відокремленими змінними).

III. Рівняння типу $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Підставляємо: $t = \frac{y}{x}$, визначаємо y' і переходимо до рівняння I типу (з відокремленими змінними).

IV. Рівняння типу $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Якщо $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ **, тоді:**

Рішаємо систему рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, та маємо рішення, $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$

підставляємо $\begin{matrix} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{matrix}$, та $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ і переходимо до рівняння III типу.

Якщо $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ **, тоді:**

виносимо a_1, a_2 за дужки зі складових x і y і перетворюємо в рівняння II типу.

V. Рівняння Лінійні $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$

1. Розв'язуємо рівняння $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$. Це рівняння з відокремленими змінними. У нас є рішення у вигляді: $y = C \cdot \ldots$.
2. У розв'язку $y = C \cdot \ldots$«міняємо постійну» і маємо $y = C(x) \cdot \ldots$.
3. Виходячи з вищесказаного, розраховуємо y'.
4. y'та y покласти в вихідне рівняння. Інгредієнти z $C(x)$ слід скоротити. Призначаємо $C'(x)$.
5. Ми інтегруємо $C'(x) = \ldots$ стосунки з обох сторін. Маємо результат: $C(x)$.
6. $C(x)$ позначені в 5-му вставляємо в 2-му і маємо рішення.

VI. Рівняння Бернуллі $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x) y^n$

Підставляємо: $z = y^{1-n}$, з цієї підстановки визначаємо y, y', y^n і переходимо до лінійного рівняння (тип V).

VII. Рівняння Рікатті $y' = p(x) \cdot y^2 + q(x) y + r(x)$

У нас є конкретне рішення (інтеграл): $y_1(x)$

Підставляємо: $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ і ми отримуємо лінійне рівняння (тип V).

VIII. Рівняння Клеро $y = xy' + f(y')$

Розрізняємо рівняння з обох сторін, починаємо рівняння: $y''\left(x + f'(y')\right) = 0$, з рівнянь $y'' = 0$ та $x + f'(y') = 0$ визначаємо y'($y'' = 0$ інтегруємо з обох сторін) і вставляємо його в вихідне рівняння, отримуючи таким чином рішення.

IX. Повні диференціальні рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Умова має бути виконана: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$, рішенням є функція $F(x,y)$.

Запишемо розв'язок усього рівняння у вигляді: $F(x,y)=C$.

X. Інтегруючий фактор $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

I. Якщо умова $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ не виконується, знаходимо інтеруючий фактор $\mu(x,y)$.

Якщо відношення $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ є функцією тільки змінної x, тоді $\mu(x,y)=\mu(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$

Якщо відношення $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ є функцією тільки змінної у, тоді $\mu(x,y)=\mu(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}$

Помножимо початкове рівняння на знайдене $\mu(x)$ або $\mu(y)$ і отримаємо рівняння типу IX (повне).

XI. Диференціальне рівняння сімейства ліній

Для того щоб отримати диференціальне рівняння сімейства ліній $F(x,y,C)=0$, необхідно розмежувати це рівняння сімейства ліній з обох сторін і «прибрати» параметр з отриманих рівнянь.

Для того, щоб отримати рівняння сімейства ортогональних прямих $F(x,y,C)=0$, необхідно замінити y' співвідношенням $-\frac{1}{y'}$ у диференціальному рівнянні цього сімейства прямих. Ми досягнемо цього диференціальне рівняння сімейства ортогональних прямих, яке ми ще можемо вирішити.