Єлементи теорії поля

Потенціал та градієнт

Функцію $\Phi(x,y,z)$ називаємо **потенціалем** векторного поля $\vec{F}=[P,Q,R]$, якщо:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=R$$

Векторне поле $\vec{F}$ називаємо **градієнтем** функції Φ , якщо:

$$\vec{F}=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\qquad \left(grad\Phi=\nabla\Phi\right)$$

Векторне поле, яке має потенціал називаємо **потенціальним**.

Рівняння поверхні $\Phi(x,y,z)=C$ називаємо **еквіпотенціальним** (або: **рівнопотенціальним**).

Існування потенціалу

Векторне поле $\vec{F}=[P,Q,R]$ є полем потенціальним, якщо:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

Дивергенція („розбіжність”)

Дивергенцією називаємо фунцію ррозраховану з векторного поля:

$$div\vec{F}[P,Q,R]=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Лапландем ($\Delta\Phi$) називаємо дивергент з градієнту функції Φ :

$$div\left(grad\Phi\right)=div\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Якщо дивергенція поля в кожній його точці дорівнює 0, поле називаємо **бездивергентним або соленоїдальним**.

Ротація („віхур”)

Ротацією називаємо векторне поле, розраховане з іншого векторного поля:

$$Rot\vec{F}=\left[\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Поле, ротація якого в кожній точці є вектором нульовим називаємо **полем безвіхуровим**.

Дивергенція розрахована з ротації завжди дорівнює 0 ($div\left(rot\vec{F}\right)=0$), тобто ротація є полем бездивергентним.

Градієнит завжди є полем безвіхуровим.

Ротацію, також можна записати як: $rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$