Курс ряди

Ряди функціональні

Критерій Веєрштраса

Маємо ряд функціональний $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Якщо від певного *n* виконується нерівність $|f_n(x)| \le a_n$, та ряд чисельний $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжний, тоді ряд функціональний $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є збіжний рівномірно та абсолютно (в визначеному полі *x*).

Ряд ступеневий

Ряд ступеневий – особливий ряд функційний

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - загальний ряд функційний

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - ряд ступеневий

Властивості ряду ступеневого:

1. Є збіжний в області *(-R, R)*, так званий $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, для $x \in (-R,R)$, може бути збіжний для *x = R* або *x = -R* для позосталих *x* є розбіжний.
2. Теорема Абеля: якщо ряд ступеневий є збіжний для *x= R*, тоді $\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(R)$
3. $\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx$ (для $x \in (-R,R)$, а також для $x = \pm R$, так як ряд є тут збіжним – так званим Абеля)
4. $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)'$ (для $x \in (-R,R)$, а також для $x = \pm R$, так як ряд є тут збіжним – так званим Абеля)

Формула на суму ряду геометричного

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$-1 < q < 1$$

Область збіжності ряд ступеневого

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1. Рахуємо *R* (то є промінь збіжності) за зразком:

$$R = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \right] \quad \text{або} \quad R = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right|} \right]$$

2. Рахуємо збіжність ряду в точках x=R та x=-R (перехід до рядів лінійних).

Ряд Тейлора

Рядем тейлора функції $f(x)$ в оточенні точки x_0 називаємо ряд у вигляді:

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Залишком н-тего рівня $R_n(x)$ ряду Тейлора називаємо функцію:

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ для } c\in(x_0,x) \text{ або } c\in(x,x_0)$$

Ряд Тейлора також можна записати у вигляді:

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$$

Ряд Тейлора прямує до функції $f(x)$ в тих точках x, для яких $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Ряд Макларена

Рядем Макларена функції $f(x)$ називаємо її ряд тейлора для $x_0=0$:

$$f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Залишком н-тего рівня $R_n(x)$ ряду Макларена називаємо функцію:

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ для } c\in(0,x) \text{ або } c\in(x,0)$$

Ряд макларена можемо також записати у вигляді:

$$f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

Ряд Макларена прямує до функції $f(x)$ в тих точках x, для яких $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.