Курс ряди

Формули

Збіжність ряду з визначенням (сума ряду)

Щоб, визначити збіжність ряду $\sum a_n$, або суму цього ряду, потрібно:

1. Розписати послідовність сум часткових:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\ldots = \ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

2. Розрахувати суму цієї послідовності, це означає:

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \right)$

Ліміт цієї послідовності є сумою ряду $\sum a_n$

Критерії збіжності рядів

- Критерій Даламбера
- Критерій Коші
- Критерій порівняння
- Критерій інтегральний

Для додатніх рядів

- Абсолютна збіжність ряду
- Критерій Лейбніца

eTrapez Usługi Edukacyjne E-learning Krystian Karczyński
www.etrapez.pl
Tel. +48 534 864 486

Критерій Даламбера та Коші

Критерій Даламбера

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є рядем для додатніх значень, тоді:

- Ряд є збіжним, коли $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- Ряд є розбіжним, коли $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Критерій Коші

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є рядем для додатніх значень, тоді:

- Ряд є збіжним, коли $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
- Ряд є розбіжним, коли $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Критерій порівняння

Ряд Діріхле

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \textbf{збіжний для} \quad \alpha > 1 \\ \textbf{розбіжний для} \quad \alpha \le 1 \end{cases}$$

Нерівності

$\sin x < x \quad (dla\ x > 0)$ $\qquad$ $\sin x > \frac{2}{\pi} x \quad \left(dla\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle\right)$

$\ln x \le x - 1$ $\qquad$ $tgx \le \frac{4}{\pi} x \quad \left(dla\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle\right)$

Критерій порівняння

Якщо ряд $\sum a_n$ є рядем з додатніми значеннями

та інший ряд $\sum b_n$ є рядем з додатніми значеннями, тоді:

Збіжність

Якщо $a_n \le b_n$ **від деякого** n $(n > n_0, n_0 \in N)$ **та ряд** $\sum b_n$

є **збіжним, тоді ряд** $\sum a_n$ є **збіжний.**

Розбіжність

Якщо $a_n \ge b_n$ **від деякого** n $(n > n_0, n_0 \in N)$ **та ряд** $\sum b_n$

є **розбіжний, тоді ряд** є **розбіжний.**

Критерій інтегральний

Маємо ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Створюємо для нього функцію $f(x)$, таку, що $f(n)=a_n$ (замінюємо „n” в послідовності на „x”).

Якщо функція та є спадаюча та додатня для $x \geq n_0$, розв’зуємо інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$.

Якщо інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ є збіжним, ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ також є збіжним.

Якщо інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ є розбіжний, ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ також є розбіжний.

Необхідні умови збіжності ряду

Аби ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ був збіжним, повинно виходити: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Абсолютна збіжність ряду

Маємо ряд: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (може мати від’ємні значення).

Якщо ряд: $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ є збіжний, тоді ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ є також збіжний.

За таку збіжність говоримо, що є така „абсолютна збіжність”, а ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ називаємо „абсолютно збіжним”.

Умовна збіжність ряду

Ряд, який є неабсолютно збіжний, але загально є збіжним, називаємо рядем „умовно збіжним”.

Критерій Лейбніца

Ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ називаємо „перемінним”, коли його вираз є на зміани додатнім та від’ємним.

Його загальний вигляд це: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Ряд перемінний є збіжним, коли:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots$$