Коефіцієнт ймовірності

Формули

Елементи комбінаторики

	Kolejność ma znaczenie	Kolejność nie ma znaczenia
Te same elementy nie mogą się powtarzać	Reguła mnożenia $\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup$	Wzór z dwumianem Newtona $\binom{n}{k}$
Te same elementy mogą się powtarzać		Wzór: $\binom{n+k-1}{k}$

«Класичне» визначення ймовірності

$$P(A)=\frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}}$$

де:

$\bar{\bar{A}}$ - кількість сприятливих подій A

$\bar{\bar{\Omega}}$ - кількість усіх подій

eTrapez Usługi Edukacyjne E-learning Krystian Karczyński
www.etrapez.pl
Tel. +48 534 864 486

Ймовірність - визначення Колмогорова

Ω - сукупність усіх елементарних подій

S – «Сигма-тіло» на полі Ω, тобто множина його підмножин, що відповідають умовам:

1) $\phi \in S$
2) $A \in S \Rightarrow A' \in S$
3) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in S \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$

P – функція з аргументами з множини S і значеннями, які є дійсними числами, що задовольняють умовам («аксіоми»):

1. $\forall_{A \in S} P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$ - для пар неперетинаються подій, тобто. $\left(A_i \cap A_j = \phi \;\; dla \;\; i \neq j\right)$

Значення функції $P(A)$ можна назвати „ймовірністю”

Властивості ймовірності

1. $P(A) \in < 0,1 >$
2. $P(\phi) = 0$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A') = 1 - P(A)$
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Незалежність подій

Події A і B є незалежними, коли:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Умовна ймовірність

Позначимо умовну ймовірність події за умови A, що подія відбудеться B, і обчислимо її за формулою $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Повна ймовірність і формула Байєса

Припускаючи, що $B_i \cap B_j \neq 0 \ \left(dla\ i \neq j\right)\ i\ P\left(B_1\right)+P\left(B_2\right)+\ldots+P\left(B_n\right)=1$:

Повна ймовірність

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)P\left(A\middle|B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A\middle|B_2\right)+\ldots+P\left(B_n\right)P\left(A\middle|B_n\right)$$

Формула Байєса

$$P\left(B_i\middle|A\right)=\frac{P\left(B_i\right)P\left(A\middle|B_i\right)}{P\left(A\right)}$$

Діаграма Бернуллі

Імовірність k «успіху» в n незалежних і ідентичних досвідах, кожен з яких може закінчитися лише двома шляхами (з імовірностями p «успіху» та q «невдачі»), дорівнює:

$$P\left(S=k\right)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Випадкові величини

Дискретні випадкові величини

Розклад

x_i	...	...	...
p_i	...	...	...

$\sum p_i = 1$

Дистрибуанта

$F(x) = P(X < x)$

Очікуване значення

$EX = \sum x_i p_i$

Медіана $x_{0,5}$**,** Me

Значення випадкової величини, для якої кумулятивні ймовірності "перевищують" $\frac{1}{2}$

Домінанта, мода D

Значення випадкової величини досягнуто з найбільшою ймовірністю

Квантиль ряду p x_p

Значення випадкової величини, для якої кумулятивні ймовірності "перевищують" p

Дисперсія $D^2(X)$**,** σ^2

$D^2(X) = \sum (x_i - EX)^2 p_i$, $D^2(X) = EX^n - (EX)^n$

Стандартне відхилення $D(X)$**,** σ

$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$

Коефіцієнт варіації V

$V = \frac{D(X)}{E(X)}$

Звичайний момент n-го порядку EX^n, α_n

$$EX^n = \sum x_i^n p_i$$

Центральний момент n-го порядку μ_n

$$\mu_n = \sum \left(x_i - EX\right)^n p_i$$

Фактор асиметрії

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\left(D\left(X\right)\right)^3}$$

Коефіцієнт концентрації

$$K = \frac{\mu_4}{\left(D\left(X\right)\right)^4}$$

Приклади розподілів дискретних випадкових величин

Розподіл Бернуллі

У розподілі Бернуллі ймовірності визначаються за формулою:

$$P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$EX = np$$

$$D^2\left(X\right) = npq$$

Розподіл Пуассона

У розподілі Пуассона ймовірності визначаються за формулою:

$$P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$EX = \lambda$$

$$D^2\left(X\right) = \lambda$$

Для великих n і малих p розподіл Бернуллі можна замінити на розподіл Пуассона

Гіпергеометричний розподіл

У гіпергеометричному розподілі ймовірності визначаються за формулою:

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Де N – кількість усіх елементів у сукупності, M – кількість усіх елементів у сукупності з певною ознакою, n – кількість елементів у вибірці, k – кількість елементів у вибірці з певною ознакою.

$$EX=\frac{M\cdot n}{N}$$

$$D^2X=n\cdot\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Для великих N і M, і $\frac{M}{N}\to p$ розподіл Бернуллі можна замінити гіпергеометричним розподілом.

Безперервні випадкові величини

Функція щільності

$$f\left(x\right)$$

$$P\left(a\le X\le b\right)=\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=1$$

Дистрибуанта

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right)=\int_{-\infty}^{x}f\left(t\right)dt$$

Очікуване значення

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx$$

Медіана $x_{0,5}$**,** Me

Значення $x_{0,5}$, для якої $F\left(x_{0,5}\right)=0,5$

Домінанта, мода D

Глобальний максимум функції щільності $f\left(x\right)$

Квантиль ряду p x_p

Значення x_p, для якої $F\left(x_p\right)=p$

Дисперсія $D^2\left(X\right)$**,** σ^2

$$D^2\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-EX\right)^2f\left(x\right)dx\,,\,D^2\left(X\right)=EX^n-\left(EX\right)^n$$

Стандартне відхилення $D\left(X\right)$**,** σ

$$D\left(X\right)=\sqrt{D^2\left(X\right)}$$

Коефіцієнт змінності V

$$V = \frac{D(X)}{E(X)}$$

Звичайний момент n-го порядку EX^n, α_n

$$EX^n = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Центральний момент n-го порядку μ_n

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^n f(x) dx$$

Фактор асиметрії

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\left(D(X)\right)^3}$$

Коефіцієнт концентрації

$$K = \frac{\mu_4}{\left(D(X)\right)^4}$$

Приклади розподілів неперервних випадкових величин

Нормальний розподіл

У нормальному розподілі ймовірності визначаються з функції густини за формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$EX = m$$

$$D^2(X) = \sigma^2$$

Стандартизація нормального розподілу:

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

Рівномірний розподіл

У рівномірному розподілі ймовірності визначаються з функції густини за формулою:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & w\ przedziale\ x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & dla\ pozostalych\ x \end{cases}$$

Експоненційний розпад

В експоненціальному розподілі ймовірності визначаються з функції густини за формулою:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & dla\ x \geq 0 \\ 0 & dla\ x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \lambda$$

$$D^2(X) = \lambda^2$$

Двовимірні випадкові величини

Двовимірні дискретні випадкові величини

Розклад

$X_{x_i} \backslash Y_{y_j}$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\sum p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\sum p_{2.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\sum p_{i.}$
	$\sum p_{.1}$	$\sum p_{.2}$	$\cdots$	$\sum p_{.j}$	1

Граничні розподіли

$\sum_i p_{i.}$, $\sum_j p_{.j}$

Умовна ймовірність

$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$, $P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$

Незалежність випадкових величин

Дві випадкові величини X і Y називаються незалежними коли:

$\underset{i,j}{\forall} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$

Дистрибунанта

$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$

Очікувані значення

Розраховуємо очікувані значення EX , EY з граничних розподілів

Дисперсія

Дисперсії $D^2(X)$ $D^2(Y)$, ми розраховуємо з граничних розподілів.

Коваріація

$$C(X,Y)=\sum_i\sum_j\left(x_i-E(X)\right)\left(y_j-E(Y)\right)p_{ij}$$

Коефіцієнт кореляції

$$\rho=\frac{C(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)}$$

Якщо $\rho=0$ називаємо випадкові величини «некорельованими». Однак це не означає, що вони незалежні. Але якщо випадкові величини незалежні, це точно $\rho=0$

Неперервні двовимірні випадкові величини

Функція щільності

$$f(x,y)$$

$$P(a \le X \le b,\ c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx = 1$$

Граничні розподіли

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \text{ , } f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

Умовні розподіли

$$f(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \text{ , } f(Y|X) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Незалежність випадкових величин

Дві випадкові величини X і Y називаються незалежними, коли для будь-яких x і y:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

Дистрибунанта

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$$

Очікувані значення

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy$$

Дисперсія

$$D^2(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2\ f_1(x)dx$$

$$D^2(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-EY)^2\ f_2(y)dx$$

Коваріація

$$C(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))(y-E(Y))\,f(x,y)dxdy$$

Коефіцієнт кореляції

$$\rho=\frac{C(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)}$$

Якщо $\rho=0$ називаємо випадкові величини «некорельованими». Однак це не означає, що вони незалежні. Але якщо випадкові величини незалежні, це точно $\rho=0$.