ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Неорієнтований граф

Неорієнтованим графем G називаємо два набори:

1. Непорожня множина вершин графа $V(G)$
2. Набір ребер графа $E(G)$, будучи підмножиною двоелементних множин вершин з V, тобто:
   $E \subseteq \{\{u,v\} : u,v \in V\}$

Граф орієнтований

Графем орієнтованим G називами два набори:

1. Непорожня множина вершин графа $V(G)$
2. Набір ребер графа $E(G)$, будучи підмножиною впорядкованих пар декартового добутку $V \times V$, тобто відносини:
   $E \subseteq V \times V$

Шлях

Шляхом у графі будемо називати послідовність ребер, у якій кінець одного є початком наступного.

Цикл

Циклем називаємо:

- Шлях $x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_1$, де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є вершинами
- З довжиною, що найменьше 1
- Закритою
- Такою, що всі вершини $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ різні

Ациклічний шлях

Ациклічний шлях – це шлях без циклу.

Krystian Karczyński eTrapez
www.etrapez.pl
tel. 534 864 486

Матриця сусідства

Матриця околиці графа (направлена чи ні) називається матрицею M ,

в якому ми представляємо кількість ребер, що з'єднують окремі вершини

Матриця інцидентів

Інцидентна матриця графа (направлена чи ні) — це матриця A, кількість рядків якої дорівнює кількості вершин, а кількість стовпців — кількості ребер. Його вираз a_{ij} дорівнює:

- -1, якщо вершина є кінцем ребра (тільки в орієнтованому графі)
- 0 , якщо вершина не торкається ребра
- 1, якщо вершина є початком ребра (в орієнтованому графі) або торкається ребра (у неорієнтованому графі)
- 2 , якщо вершина є початком і кінцем ребра (тільки в орієнтованому графі)

ГРАФІЧНІ ТИПИ

Ациклічні графи

Ациклічний граф — це граф без циклу.

Ізоморфні графи

Графи G та H є ізоморфними, коли існують такі взаємно однозначні функції $v: V(G) \to V(H)$ та $e: E(G) \to E(H)$ приписують їх вершини і ребра один одному так, що відповідні ребра з'єднують відповідні вершини.

Це означає, що ребро a з'єднує дві вершини x та y в графі G тоді і тільки тоді, коли відповідне ребро $e(a)$ з'єднує вершини $v(x)$ та $v(y)$ в графі H.

Озн: $G \simeq H$

Простий граф

Простий граф — це граф без кількох ребер і без петель.

Регулярний граф

Регулярний граф — це граф, у якому всі вершини мають однаковий ступінь.

Порожній граф

Порожній граф — це граф без ребер взагалі (тільки ізольовані вершини).

Повний граф

Повний граф - це простий граф, в якому кожна вершина з'єднана ребром одна з одною.

Озн: K_n

Самододатковий граф

Самододатковим графом називається ізоморфний граф з доповненням.

Дводольний граф

Дводольним графом називається граф, вершини якого можна розділити на дві непересекаючі множини A та B, так що кожне ребро графа з'єднує вершину з множини A з вершиною з множини B.

Graf dwudzielny pełny

Повний дводольний граф — це дводольний граф, позначений, як зазначено вище, але такий, що кожна вершина множини A пов’язана з кожною вершиною множини B.

Куб Q_k

Граф, вершини якого відповідають k-елементним послідовностям нуль-один, де дві вершини з’єднані ребром, якщо відповідні послідовності відрізняються рівно в одному місці, ми називаємо k-кінцевий куб і позначимо як Q_k.

Код Грея

Довжина коду Грея n – рядок, що містить усі комбінації n цифр 0 і 1, упорядкований таким чином, що дві послідовні комбінації в рядку відрізняються рівно на одну цифру, а остання – на одну цифру від першої.

ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

Сума графов

Сумою графов $G_1=\{V(G_1),E(G_1)\},G_2=\{V(G_2),E(G_2)\}$ називаємо граф $G_1\cup G_2=\{V(G_1)\cup V(G_2),E(G_1)\cup E(G_2)\}$.

Підграф

Підграфем графу $G=\{V(G),E(G)\}$ називаємо граф $G'=\{V(G'),E(G')\}$, такий, що: $V(G')\subseteq V(G),E(G')\subseteq E(G)$.

Різниця графов

Під $G-G'$ розуміємо граф, що виникає по видаленю з графа G вершин, що належать G' і краю до них випадкових.

Під $G\setminus e$ розуміємо граф, що виникає по видаленю з графа G краю e і ‘’поєднання” поміж собою вершин до неї випадкових.

Доповнення графу

Доповненням $\overline{G}$ до простого графа G з набором вершин $V(G)$ є граф з такою ж множиною вершин і граф, у якому вершини з’єднані ребром тоді і тільки тоді, коли вони не з’єднані в графі G .

ШЛЯХ І ЦИКЛ ЕЙЛЕРА

Шлях Ейлера

Шлях Ейлера - це дорога, яка має всі ребра і не містить двох однакових ребер.

Цикл Ейлера

Ейлерів шлях – це закрита дорога з усіма ребрамиі такий, який не містить двох однакових ребер.

Теорема Ейлера (про існування циклу Ейлера)

Зв'язний граф, що має всі вершини парного ступеня, має цикл Ейлера.

Теорема про існування шляху Ейлера

Зв'язний граф, що має рівно дві вершини непарного ступеня, має шлях Ейлера.

АЛГОРИТМ Флері

Нехай:

ES - певна послідовність ребер циклу або шляху

VS - ряд вершин циклу або шляху

- КРОК 1: Якщо в графі є вершина v непарного ступеня, виберіть її, інакше виберіть будь-яку вершину парного ступеня. На самому початку $VS=v$ і $ES=\lambda$ (порожній рядок).
- КРОК 2: Якщо ребра більше не виходять із вершини v, зупиніться.
- КРОК 3: Якщо в графі залишилося рівно одне ребро, що веде від вершини v до певної вершини w (нехай це ребро e), то видаліть ребро e та вершину v, а потім перейдіть до КРОКУ 5
- КРОК 4: Якщо граф має більше ніж одне ребро, що виходить із вершини v, виберіть ребро e, після якого видалення графа залишиться послідовним, а потім видаліть ребро e
- КРОК 5: замініть v вершиною w, додайте w до кінця рядка VS та e до кінця рядка ES. Перейдіть до КРОКУ 2.

Krystian Karczyński eTrapez
www.etrapez.pl
tel. 534 864 486

ШЛЯХ І ЦИКЛ ГАМІЛЬТОНА

Шлях Гамільтона

Гамільтонів шлях — це шлях, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

Цикл Гамільтона

Цикл Гамільтона — це замкнутий шлях, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

ДОСТАТНЯ УМОВА 1 для того, щоб графік був гамільтоновим

Якщо граф G не має петель або кратних ребер і має принаймні 3 вершини, кожна з яких має ступінь, що дорівнює принаймні половині кількості вершин, то граф G є гамільтоновим графом.

ДОСТАТНЯ УМОВА 2 для того, щоб графік був гамільтоновим

Якщо граф n з вершинами без петель або кратними ребрами має принаймні $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ ребра, то граф G є гамільтоновим графом.

ДОСТАТНЯ УМОВА 3 для того, щоб графік був гамільтоновим

Якщо граф n з вершинами без петель або кратними ребрами має принаймні 3 вершини, і для кожної пари вершин (v,w), не з'єднаних ребром, існує нерівність: $\deg(v)+\deg(w)\geq n$ графік G є гамільтоновим.

Krystian Karczyński eTrapez
www.etrapez.pl
tel. 534 864 486

НЕОБХІДНА УМОВА для того, щоб граф був гамільтоновим графом для дводольних графів

Нехай G це дводольний граф з поділом вершин на непересекаючі множини $V(G) = V_1 \cup V_2$. Тоді:

- Якщо граф G має цикл Гамільтона, то: $|V_1| = |V_2|$
- Якщо граф G має шлях Гамільтога, - кількість предметів у наборах V_1, V_2 відрізняються щонайбільше на 1
- Якщо граф не має ні циклу, ні гамільтонового шляху, то кількість елементів у наборах відрізняється щонайменше на 2

Якщо граф G є повним дводольним графом з принаймні трьома вершинами, також має місце обернене значення.

Krystian Karczyński eTrapez
www.etrapez.pl
tel. 534 864 486

Графи орієнтоване

Джерело

Вершина орієнтованого графа, яка не є кінцем жодного ребра.

Вихід

Вершина орієнтованого графа, яка не є початком жодного ребра.

Теорема про наявність джерела та виходу

Кожен кінцевий ациклічний орієнтований граф має принаймні один вихід і хоча б одне джерело.

АЛГОРИТМ знайти вихід

Нехай задано скінченний ациклічний орієнтований граф G .

- КРОК 1: Виберіть будь-яку вершину в наборі $V(G)$.
- КРОК 2: Позначте рот як верхівку v.
- КРОК 3: Поки є вершина-наступник v, виберіть вершину u з набору наступників вершин v, позначте її як v і перейдіть до КРОКУ 2.

Упорядковане маркування

Упорядковане маркування — це нумерація вершин циклічного графа, спрямованого числами від 1 до n, таким чином, що коли є шлях від вершини з номером i до вершини з числом j, це точно $i > j$.

Кожен ациклічний орієнтований граф має впорядковане позначення.

АЛГОРИТМ пошуку впорядкованого маркування

На вході має бути скінченний ациклічний орієнтований граф G з вершинами, набором вершин V і набором ребер E.

КРОК 1: Доки V він не порожній, створіть новий підграф H, що складається з поточного набору вершин V і набору ребер E.

КРОК 2: Знайдіть будь-який вихід на графіку H (наприклад, за допомогою алгоритму, описаного вище) і позначте його $n-|V|+1$.

КРОК 3: Видаліть вершину з КРОКУ 2 з набору V, також видаліть ребра, що входять до неї, з набору E.

ВЕРТИКАЛЬНА СТАВКА в орієнтованому графі

Ступінь «входу» у вершину $in\deg(v)$ — це кількість ребер, що «входять» у неї, тобто кількість ребер із закінченням цієї вершини.

Ступінь «виходу» вершини $out\deg(v)$ — це кількість ребер, що «виходять» з неї, тобто кількість ребер, вершина яких є початком.

Ступінь вершини $\deg(v)$ в орієнтованому графі є сумою «вхідних» і «вихідних» ребер:

$$in\deg(v)+out\deg(v)=\deg(v)$$

Петля збільшує градус на 2 - як ребро одночасно «входить» і «вихідні».

Існування циклу Ейлера для орієнтованих графів

Для орієнтованого «когерентного» графа (тобто такого, який буде послідовним, якщо його розглядати як ненаправленого):

Цей графік має цикл Ейлера тоді і тільки тоді, коли введені градуси і вихід кожної вершини дорівнює:

$$in\deg(v)=out\deg(v)$$

ІСНУВАННЯ ШЛЯХУ ЮЛЕРА для орієнтованих графів

Для орієнтованого «когерентного» графа (тобто такого, який буде послідовним, якщо його розглядати як ненаправленого):

Цей графік має шлях Ейлера тоді і тільки тоді, коли кроки входу 0 і вихід кожної вершини, крім двох, дорівнює:

$$in\deg(v) = out\deg(v)$$

Що стосується двох вершин, вхідний і вихідний ступені яких не є рівними, то в одній з них вхідний крок повинен бути більшим за іншу на 1, а вихідний каскад менше на 1.

ІНВЕРСІЯ графіка

Інверсія орієнтованого графа G — це орієнтований граф $\widehat{G}$, отриманий шляхом зміни напрямків усіх ребер графа G .

Krystian Karczyński eTrapez
www.etrapez.pl
tel. 534 864 486