

ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБОЗНАЧЕННЯ ТРИКУТНИКА

Трикутник — це багатокутник із трьома сторонами.

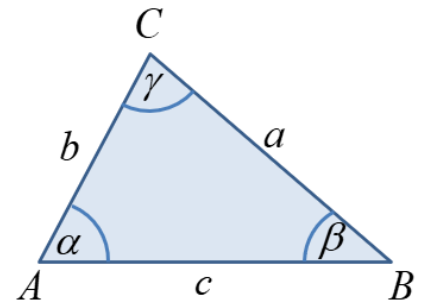
позначаємо вершини великими літерами: A, B, C ; D, E, F ітп.

сторони позначаємо малими літерами: a, b, c ; d, e, f ітп.

відповідна мала літера стоїть навпроти даної вершини:
- навпроти вершини A лежить сторона a

позначаємо кути малими грецькими літерами: α, β, γ

кут α при вершині A , кут β при вершині B ,
кут γ при вершині C



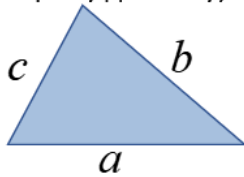
Сума мір внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Периметр трикутника: $Obw = a + b + c$

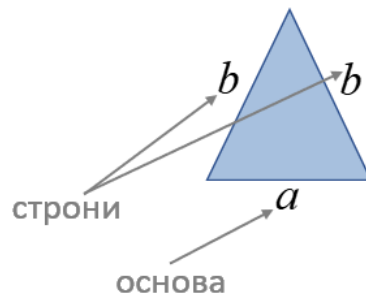
ВИДИ ТРИКУТНИКІВ

ЧЕРЕЗ ДОВЖИНУ СТОРІН

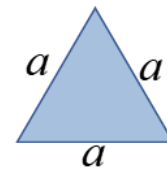
різнобочні трикутники
(кожна сторона має
різну довжину)



рівнобедрених трикутників
(щонайменше дві сторони мають
однакової довжини)

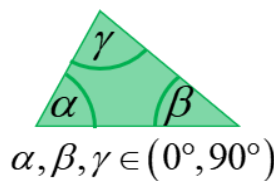


рівносторонні трикутники
(всі сторони однакової довжини)



ДЛЯ МІР КУТІВ

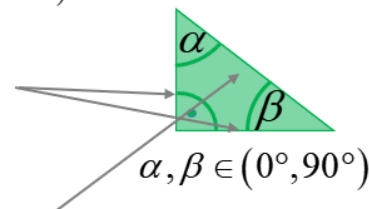
гострокутні трикутники
(усі кути гострі)



$$\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$$

прямокутні трикутники
(один кут прямий
і два гострі)

катети



$$\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

гіпотенуза

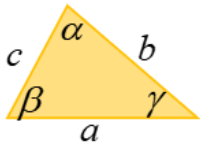
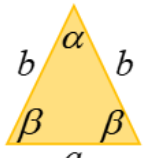
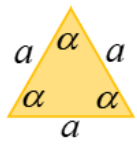
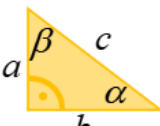
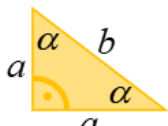
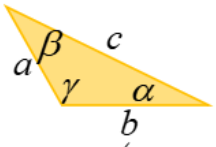
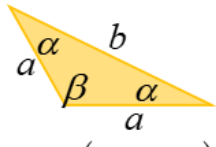
тупокутні трикутники
(один кут тупий
і два гострі)



$$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$$

$$\beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$$

ВИДИ ТРИКУТНИКІВ

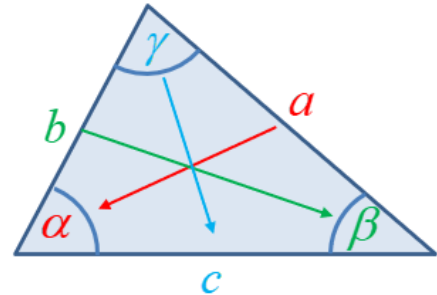
	різностронні	рівнобедерні	рівностронні
гострокутні	 $\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a > b > c$	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a \neq b$	 $\alpha = 60^\circ$
прямокутні	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a < b < c$	 $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a < b$	×
тупокутні	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $\gamma \in (90^\circ, 180^\circ)$ $a < b < c$	 $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$ $a < b$	×

ЗВ'ЯЗОК МІЖ СТОРОНАМИ І КУТОМ ТРИКУТНИКА

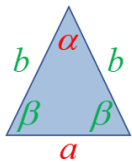
Якщо два кути трикутника мають різні міри, то сторона, протилежна більшій, довша.

Якщо дві сторони трикутника різної довжини, то кут проти довшої сторони більший.

- найкоротша сторона, протилежна найменшому куту
- середня сторона проти середнього кута
- найдовша сторона, протилежна найбільшому куту

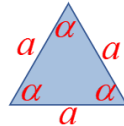


трикутник рівнобочний



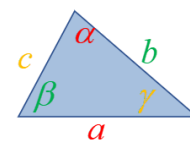
два рівні боки
два рівні кути

трикутник рівнобочний



три рівні боки
три рівні кути
 $\alpha = 60^\circ$

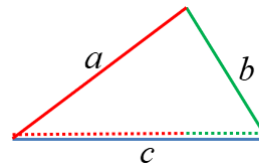
трикутник різнобочний



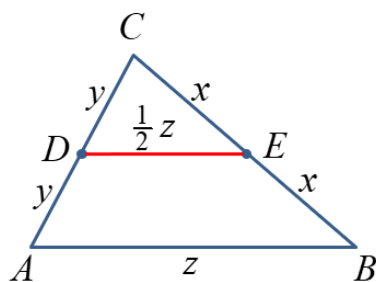
три різні боки
три різні кути

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони трикутника.



$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

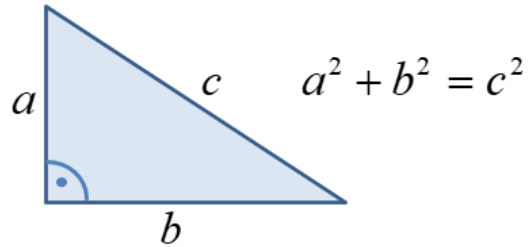


РОЗДІЛ, ЩО ОБ'ЄДНАЄ СРЕДИНУ СТОРОНІВ ТРИКУТНИКА

Відрізок, що з'єднує центри двох сторін трикутника, паралельний третій стороні, а його довжина вдвічі менша за довжину третьої сторони.

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

Якщо трикутник прямокутний, то сума квадратів катетів дорівнює квадрату довжини гіпотенузи.

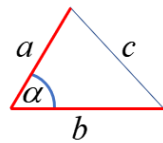


Зворотне значення теореми Піфагора

Якщо сума квадратів довжин двох найкоротших сторін дорівнює квадрату довжини найдовшої сторони, трикутник є прямокутним.

Дві коротші сторони називаються гіпотенузою, а найдовша — гіпотенузою.

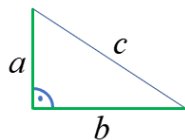
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПІТАГОРАСА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КУТІВ У ТРИКУТНИКУ



$$a^2 + b^2 > c^2$$

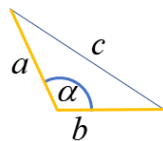
$$\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$$

c - найдовший бік
трикутник гострокутний



$$a^2 + b^2 = c^2$$

c - найдовший бік
трикутник прямокутний




$$a^2 + b^2 < c^2$$

$$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$$

c - найдовший бік
трикутник тупокутний

Якщо довжини a, b, c сторін трикутника відповідають умові $a \leq b \leq c$, тоді:

якщо $a^2 + b^2 > c^2$ то цей трикутник **гострокутний**, 

якщо $a^2 + b^2 < c^2$, тоді трикутник **тупокутний**, 

та якщо $a^2 + b^2 = c^2$, тоді трикутник **прямокутний**. 

ВИСОТА У ТРИКУТНИКУ

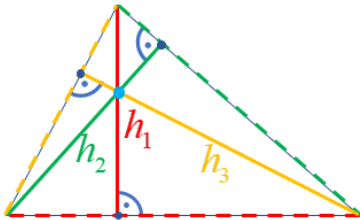
Висота трикутника - це відрізок, що з'єднує вершину трикутника з прямою, що містить протилежну сторону і перпендикулярна до цієї сторони.

Будь-який трикутник має три висоти.

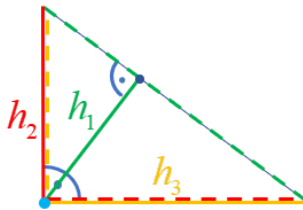
Місце перетину висоти і сторони, на яку вона була опущена, називається **ОСНОВОЮ висоти**.

У кожному трикутнику висоти перетинаються в одній точці. Цю точку називають **ортоцентром трикутника**.

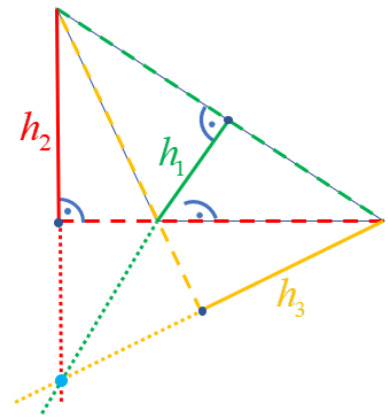
трикутник гострокутний



трикутник прямокутний

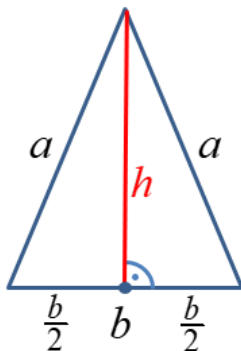


трикутник тупокутний



РІВНОБЕДЕРНИЙ ТРИКУТНИК

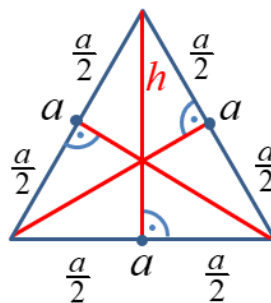
Основу висоти, проведене в основі рівнобедреного трикутника, ділить основу на дві рівні частини.



ТРИКУТНИК РІВНОБОЧНИЙ

Будь-якої висоти рівностороннього трикутника ділить сторону трикутника на дві рівні частини.

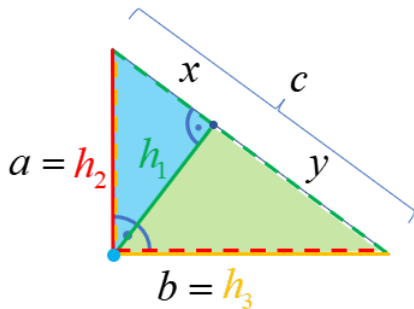
Точка перетину висот у рівносторонньому трикутнику ділить кожен з цих висот у відношенні 2:1 від вершини трикутника.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

формула висоти
рівностороннього
трикутника

ТРИКУТНИК ПРЯМОКУТНИЙ

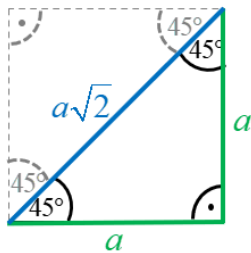


Дві висоти прямокутного трикутника однакові зі сторонами трикутника.

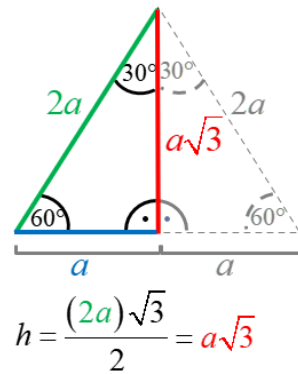
формула висоти прямокутного трикутника, взята з вершини прямого кута $h_1 = \sqrt{xy}$

КВАДРАТНІ ТРИКУТНИКИ

трикутник $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$



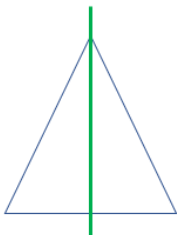
трикутник $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$



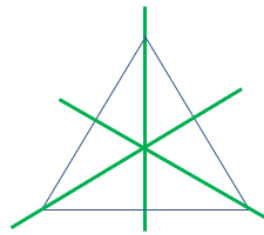
ВІСІ СИМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА

Трикутник може мати:

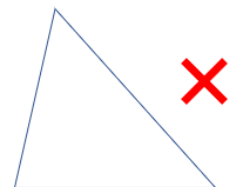
- 3 осі симетрії (рівносторонній)
- 1 вісь симетрії (рівнобедрений, нерівносторонній)
- 0 вісь симетрії (з іншого боку)



рівнобедрений трикутник



рівносторонній трикутник



різносторонній трикутник

МЕДІАНИ ТРИКУТНИКА

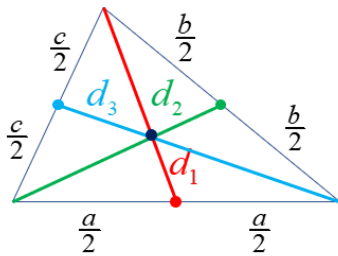
Медіана трикутника - це лінія, яка з'єднує вершину трикутника з центром протилежної сторони.

Будь-який трикутник має три середніх. Кожен середній міститься в трикутнику.

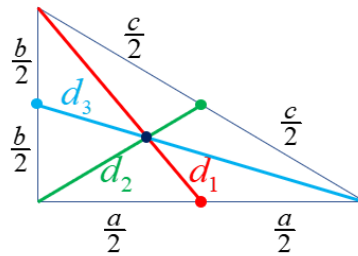
У кожному трикутнику центральні лінії перетинаються в одній точці. Ця точка називається **центром тяжіння трикутника**.

У будь-якому трикутнику всі три центри перетинаються в одній точці, яка відділяє середини 2:1 від вершини.

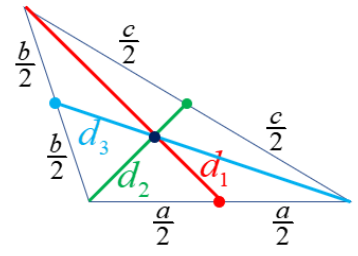
гострокутний трикутник



прямокутний трикутник

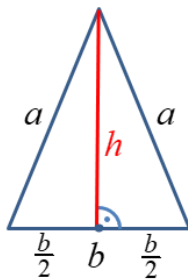


тупокутний трикутник



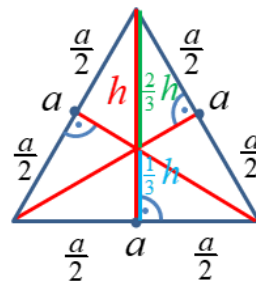
РІВНОБЕДЕРНИЙ ТРИКУТНИК

Висота в основі рівнобедреного трикутника також є серединою трикутника.



РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК

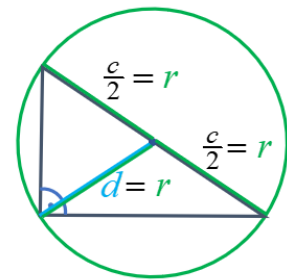
Висоти в рівносторонньому трикутнику збігаються із серединами трикутника.



ПРОСТОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Гіпотенуза прямокутного трикутника — це діаметр описаного трикутника кола.

У прямокутному трикутнику середній, проведений з вершини прямого кута, має довжину, що дорівнює половині довжини гіпотенузи.



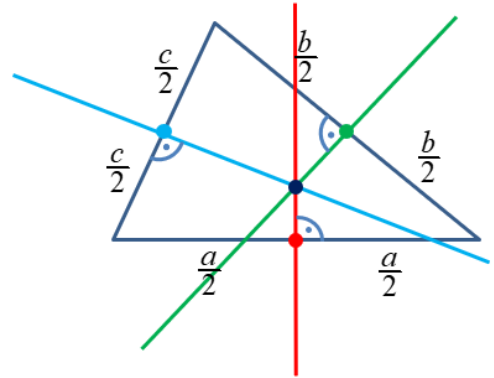
прямокутний трикутник, вписаний в коло

СИМЕТРИЧНА СТОРОНА ТРИКУТНИКА

Симетричною стороною трикутника є пряма, перпендикулярна до цієї сторони, що проходить через його центр.

Кожен трикутник має три симетричні сторони і вони перетинаються в одній точці.

Точка перетину симетричних сторін трикутника є центром описаного кола трикутника.

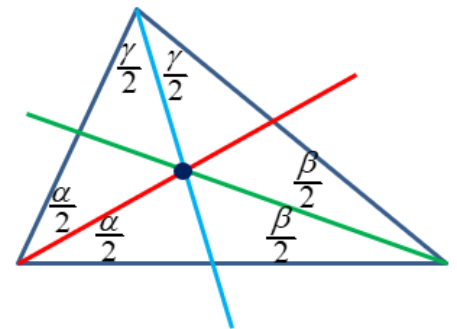


БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Бісектриса кута трикутника - це промінь, який ділить внутрішній кут трикутника на два рівних кута.

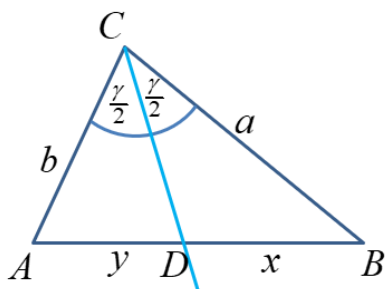
Кожен трикутник має три бісектриси внутрішніх кутів і вони перетинаються в одній точці.

Точкою перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника є центр кола, вписаного всередину трикутника..



ТЕОРЕМА О БІСЕКТРИСІ

Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки пропорційна двом іншим сторонам трикутника. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$



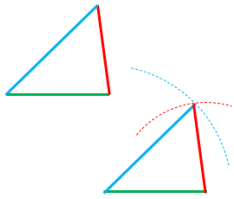
КОНГРУЕНТНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Два трикутники рівні тоді і тільки тоді, коли у них рівні сторони та рівні кути.

Позначення: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$

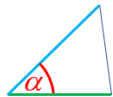
ОСОБЛИВОСТІ КОНГРУЕНТНОСТІ ТРИКУТНИКОМ

сторона-сторона-сторона

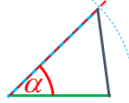


$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ |BC| &= |B_1C_1| \\ |AC| &= |A_1C_1| \end{aligned}$$

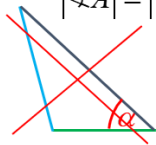
сторона-кут-сторона



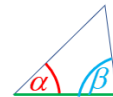
Кут між двома даними сторонами!



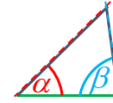
$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ |AC| &= |A_1C_1| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \end{aligned}$$



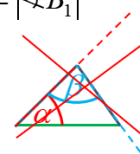
кут-сторона-кут



Сторона між двома заданими кутами!



$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B &= \sphericalangle B_1 \end{aligned}$$



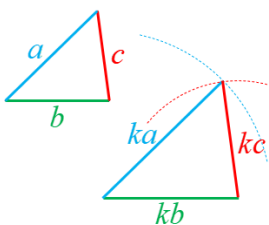
ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Два трикутники подібні тоді і тільки тоді, коли вони мають пропорційні сторони та рівні кути.

позначення: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДІБНИХ ТРИКУТНИКІВ

сторона-сторона-сторона

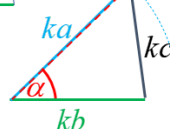


$$\begin{aligned} |A_1B_1| &= k|AB| \\ |B_1C_1| &= k|BC| \\ |A_1C_1| &= k|AC| \end{aligned}$$

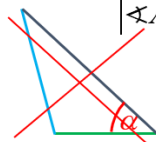
сторона-кут-сторона



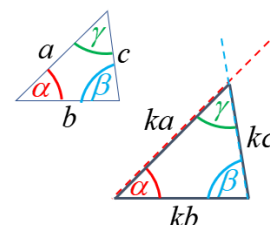
Кут між двома даними сторонами!



$$\begin{aligned} |A_1B_1| &= k|AB| \\ |A_1C_1| &= k|AC| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \end{aligned}$$



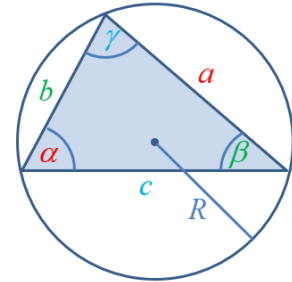
кут-кут-кут



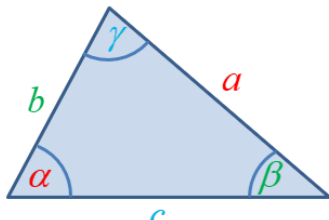
$$\begin{aligned} \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B &= \sphericalangle B_1 \\ \sphericalangle C &= \sphericalangle C_1 \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА СИНУСІВ

У будь-якому трикутнику відношення довжини сторони до синуса кута, протилежного цій стороні, є постійною і дорівнює діаметру кола, описаного навколо трикутника..



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

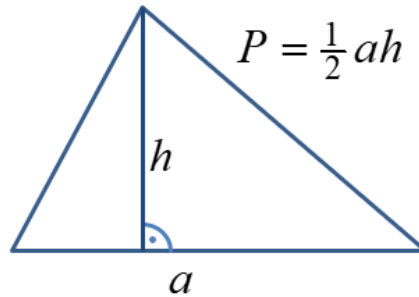
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

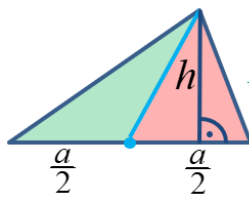
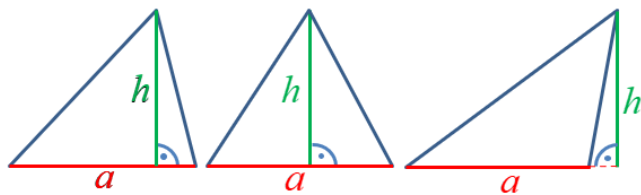
ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

У будь-якому трикутнику квадрат довжини однієї сторони дорівнює сумі квадратів довжин двох інших сторін, зменшеної на подвійний добуток цих довжин на косинус кута між ними.

ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА



Ці рівні площі мають різні трикутники з однаковими основами і однаковими висотами, опущеними до цих основ.

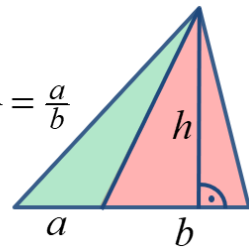


$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h$$

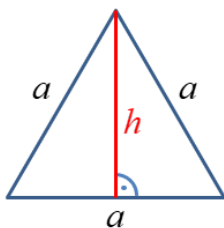
Медиана ділить трикутник на два трикутники з однакою площею.

Якщо два трикутники мають однакову висоту, то відношення їх площ дорівнює відношенню довжин основ, на які опущена висота.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}$$



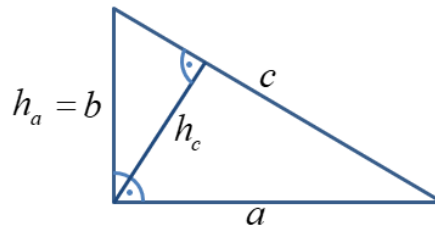
ПЛОЩІ РІВНОБОРНОГО ТРИКУТНИКА



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

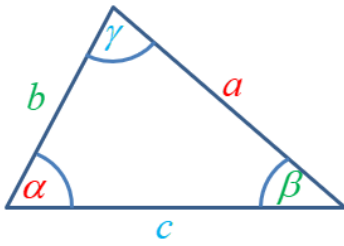
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ПЛОЩІ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



$$P = \frac{1}{2} ab$$

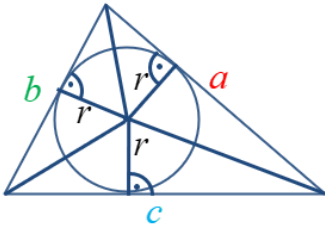
$$h_c = \frac{ab}{c}$$



$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

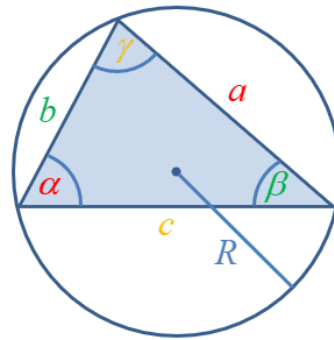
$$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$



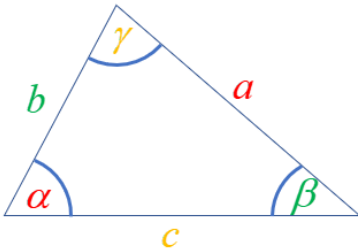
$$P = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$$

$$P = \frac{1}{2} (a + b + c) r$$

$$P = pr \quad p = \frac{1}{2} (a + b + c)$$



$$P = \frac{abc}{4R}$$



Формула Херона

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

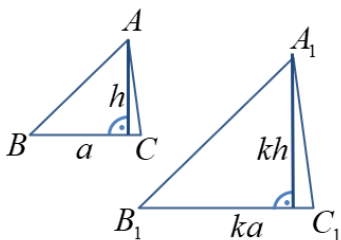
$$p = \frac{1}{2} Obw = \frac{1}{2} (a + b + c)$$

$$P = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad R - \text{радіус кола, описаного трикутником}$$

ПЛОЩІ ПОДОБНИХ ТРИКУТНИКІВ

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$



$$Obw_{A_1B_1C_1} = k \cdot Obw_{ABC}$$

$$P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ABC}$$

Співвідношення площ подібних фігур дорівнює квадрату шкала подібності.