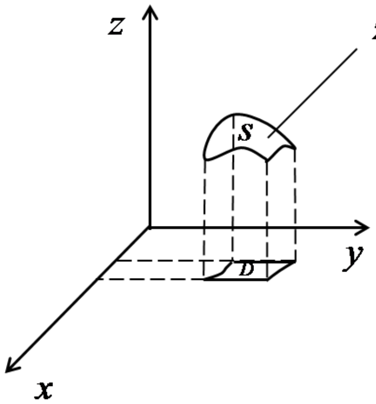
Формули поверхневих інтегралів:

Неорієнтовані поверхневі інтеграли

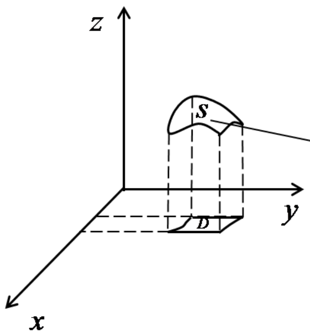
Формули переходу на подвійний інтеграл



$z = f(x,y)$

Поверхня S в нормальному вигляді $z = f(x,y)$:

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$



$$S:\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \end{cases}$$

$(u,v)\in\Delta$

Поверхня S в параметричному вигляді:

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \iint_\Delta F(\varphi,\psi,\chi)\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,dudv$$

Використання фізичні

$F(x,y,z)$ - щільність

Якщо $F(x,y,z)$ є щільністю поверхні S, тоді інтеграл $\iint_S F(x,y,z)\,ds$ є масою поверхні S.

Якщо $F(x,y,z)$ є щільністю електричного заряду, тоді інтеграл $\iint_S F(x,y,z)\,ds$ показує цілий заряд.

Статичні моменти площини S по відношенню до площин x0y, y0z, z0x:

$$M_{xy} = \iint_S zF(x,y,z)\,ds, \quad M_{yz} = \iint_S xF(x,y,z)\,ds, \quad M_{zx} = \iint_S yF(x,y,z)\,ds$$

Координати центру маси: $\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{zx}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$

Момент інерції поверхні S відносно площин x0y, y0z, z0x:

$$I_{xy} = \iint_S z^2 F(x, y, z) ds, \quad I_{yz} = \iint_S x^2 F(x, y, z) ds, \quad I_{zx} = \iint_S y^2 F(x, y, z) ds$$

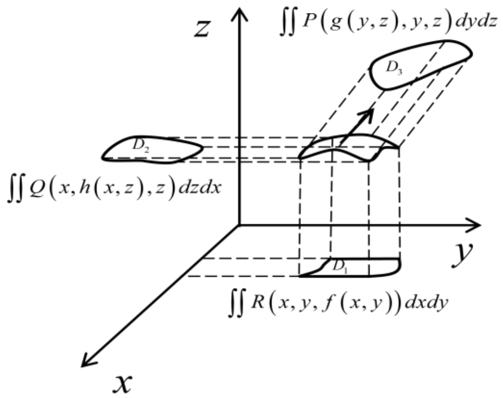
Момент інерції поверхні S відносно осі координат 0x, 0y, 0z:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) F(x, y, z) ds, \quad I_y = \iint_S (z^2 + x^2) F(x, y, z) ds, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) F(x, y, z) ds$$

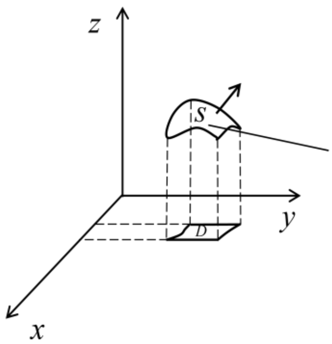
Момент інерції поверхні S відносно початку системи координат:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) F(x, y, z) ds$$

Визначені поверхневі інтеграли



$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} P\big(g(y,z),y,z\big)\,dydz + \iint\limits_{D_2} Q\big(x,h(x,z),z\big)\,dzdx + \iint\limits_{D_3} R\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy$$

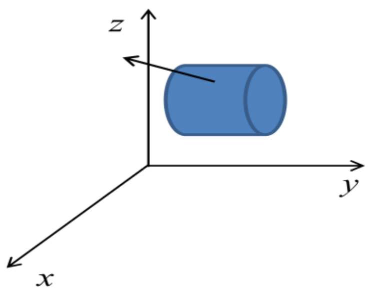


$$S:\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \end{cases}$$

$$(u,v)\in\Delta$$

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta}\left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)dudv$$

Теорема Гауса - Остроградського



Якщо поверхня S є замкнутою поверхнею (обмежує якесь тіло V), зовні орієнтованою:

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

eTrapez Usługi Edukacyjne E-learning Krystian Karczyński
www.etrapez.pl
Tel. +48 534 864 486