

# Формули потрібних інтегралів:

## Розрахунок потрібного інтегралу

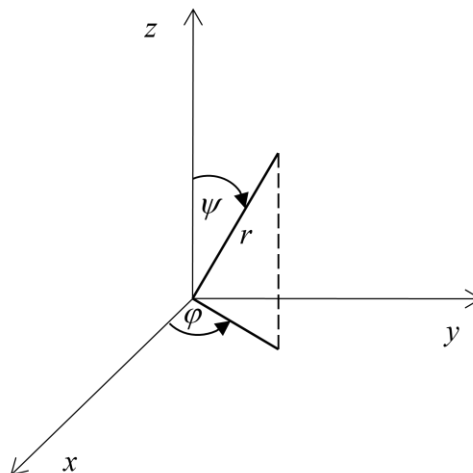
Якщо площа  $D$  є площею:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ k(x) \leq y \leq h(x) \\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \end{cases}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Перехід до сферичних координат:

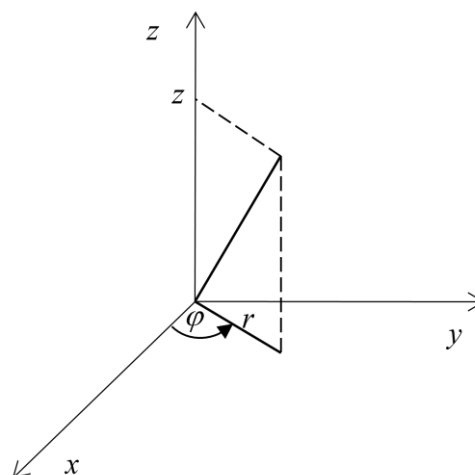
$$\begin{cases} x = r \sin \psi \cos \varphi \\ y = r \sin \psi \sin \varphi \\ z = r \cos \psi \end{cases}$$



Якобіан:  $r^2 \sin \psi$

Перехід до циліндричних координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



Якобіан:  $r$

## Розрахунок об'єму за допомогою потрійного інтегралу

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

### Фізичне застосування потрійних інтегралів

Якщо  $\rho(x, y, z)$  визначає щільність об'ємного тіла  $V$ , тоді:

Маса  $M$  цього тіла: 
$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Статичний момент відносно площини  $xOy$ : 
$$M_{xy} = \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Статичний момент відносно площини  $yOz$ : 
$$M_{yz} = \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Статичний момент відносно площини  $zOx$ : 
$$M_{zx} = \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Координати центру маси: 
$$\left( \frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{zx}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right)$$

Момент інерції відносно площини  $xOy$ : 
$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно площини  $yOz$ : 
$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно площини  $zOx$ : 
$$I_{zx} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно осі X:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно осі Y:

$$I_y = \iiint_V (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно осі Z:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Момент інерції відносно початку системи координат:

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$