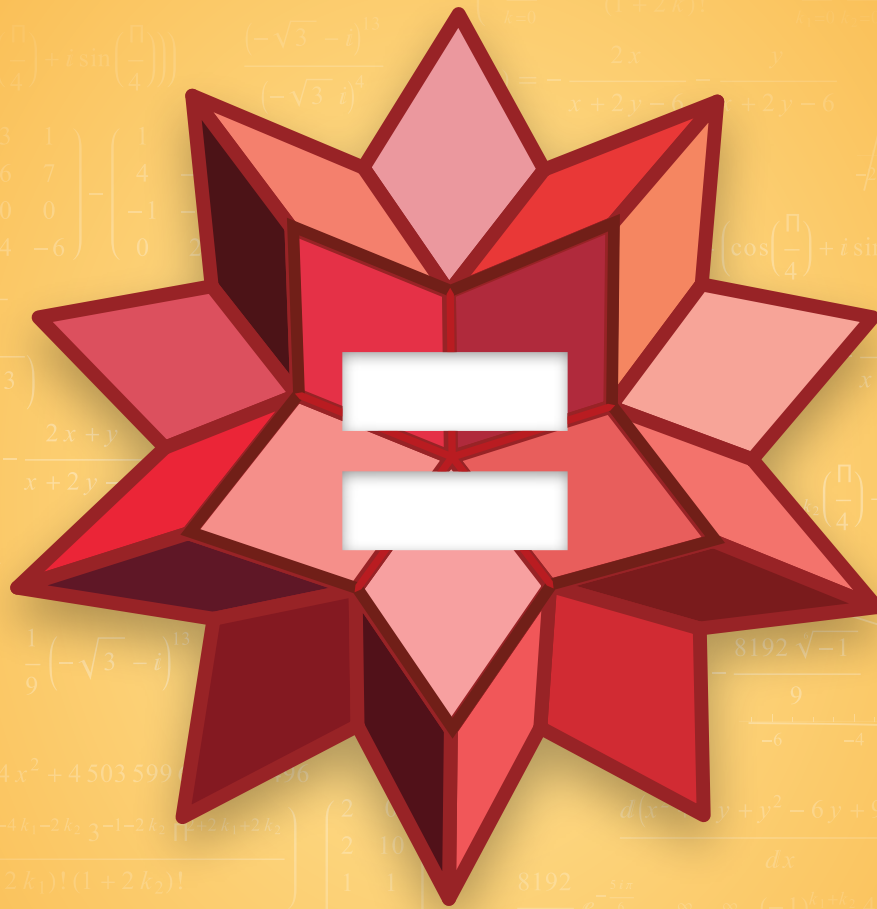


# WolframAlpha<sup>®</sup>

## Praktyczny przewodnik



**Kilka stron obliczeń jednym kliknięciem**



## Spis treści

<b>WolframAlpha – do czego może Ci się to przydać?</b>	<b>4</b>
<b>O mnie</b>	<b>5</b>
<b>I. Wstęp. Formuły matematyczne.</b>	<b>6</b>
<b>II. Macierze.</b>	<b>11</b>
II.1. Wpisywanie macierzy do WolframAlpha ogólnie.	11
II.2. Podstawowe działania na macierzach.	12
II.3. Wyznaczniki macierzy.	16
II.4. Macierz odwrotna.	16
II.5. Rząd macierzy.	17
II.6. Układy równań liniowych.	17
II.7. Inne.	19
<b>III. Liczby Zespólone.</b>	<b>20</b>
III.1. Wpisywanie liczb zespolonych do WolframAlpha ogólnie.	20
III.2. Podstawowe działania na liczbach zespolonych w postaci kartezyjskiej/algebraicznej.	20
III.3. Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej.	27
<b>IV. Geometria Analityczna.</b>	<b>34</b>
IV.1. Działania na wektorach.	34
IV.2. Płaszczyzny.	40
IV.3. Proste.	41
<b>V. Granice.</b>	<b>42</b>
<b>VI. Pochodne funkcji.</b>	<b>45</b>
<b>VII. Badanie przebiegu zmienności funkcji.</b>	<b>47</b>
<b>VIII. Całki nieoznaczone.</b>	<b>54</b>
<b>IX. Całki oznaczone, niewłaściwe i zastosowania całek.</b>	<b>55</b>
<b>X. Funkcje wielu zmiennych.</b>	<b>64</b>
X.1. Pochodne cząstkowe.	64
X.2. Ekstrema funkcji.	65
X.3. Dziedzina funkcji.	66
X.4. Funkcje uwikłane.	68

<b>XI. Całki wielokrotne.</b>	<b>70</b>
XI.1. Całki podwójne.	70
XI.2. Całki potrójne.	72
<b>XII. Elementy teorii pola.</b>	<b>73</b>
XII.1. Gradient.	73
XII.2. Dywergencja.	74
XII.2. Rotacja.	75
XII.3. Laplasjan.	76
<b>XIII. Równania różniczkowe.</b>	<b>77</b>
<b>XIV. Szeregi.</b>	<b>80</b>
XIV.1. Szeregi liczbowe.	80
XIV.2. Szeregi funkcyjne.	81
XIV.3. Szeregi Taylora i Maclaurina.	83
<b>XV. Prawdopodobieństwo.</b>	<b>85</b>
<b>Streszczenie fraz do wpisywania w WolframAlpha.</b>	<b>88</b>

## WolframAlpha – do czego może Ci się to przydać?

WolframAlpha to **darmowy** obliczeniowy silnik wiedzy. Działa w prosty sposób – wpisujesz do niej pytanie, wciskasz ENTER i masz odpowiedź.

WolframAlpha radzi sobie doskonale z zapytaniami matematycznymi i to bardzo zaawansowanymi. Może więc posłużyć Ci jako niezawodny **kalkulator**, którym policzysz wszelkie macierze, całki i równania. Policzysz właściwie wszystko, co **potrzebne na studiach!**

### Jak masz to zrobić?

1. Wchodzisz na stronę [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)
2. Wpisujesz, co chcesz policzyć
3. Masz rozwiązanie

WolframAlpha przyjmuje zapytania w języku angielskim, więc w przypadku bardziej złożonych obliczeń, krok 2 może sprawiać trochę kłopotów.

Dlatego właśnie napisałem ebooka „WolframAlpha Praktyczny przewodnik”, dzięki któremu nauczysz się wszystkich komend potrzebnych do tego „kalkulatora”.

### **UWAGA !**

Nie można mylić WolframAlpha z Google. Google przeszukuje internet i w odpowiedzi na Twoje zapytanie podaje Ci linki do różnych stron. WolframAlpha nie przeszukuje Internetu, tylko sam podaje Ci gotową odpowiedź, korzystając z własnych zasobów.

## O mnie



Krystian Karczyński


Nazywam się Krystian Karczyński i od wielu lat pomagam studentom z matematyką.


Zaczynałem jako korepetytor, później zacząłem tworzyć matematyczne Kursy Video i [publikować](#) je w Internecie. Jak się szybko okazało, na moje Kursy jest wśród studentów ogromne zapotrzebowanie i mogłem pomóc już tysiącom z nich w uporaniu się z matematyką na studiach.


Prowadzę również [bloga](#) z poradami dla studentów, jestem na:


## *I. Wstęp. Formuły matematyczne.*


Na początku wejdź na stronę [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) i wpisz kilkanaście nudnych, rozgrzewkowych przykładów, typu:

Aby otrzymać wynik kliknij na ENTER lub ikonkę .

Mnożenie wpisujesz znakiem  :

Do dzielenia używasz znaku  :

Potęgi oznaczasz znakiem  :

Pierwiastki drugiego stopnia wpisujesz jako  (gdzie w miejsce trzech kropek wpisujesz, z czego chcesz policzyć pierwiastek), a wyższych stopni jako odpowiednią potęgę (jak wiesz, np.  $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ );



W ułamkach dziesiętnych używasz koniecznie **KROPKI**, a nie przecinka:

W przypadku wpisywania bardziej złożonych formuł zwracaj wielką uwagę na nawiasy, które decydują o kolejności działań, np. jeśli chcesz wpisać w WolframAlpha  $\sqrt{\frac{x}{y}}$  :

## II. Macierze.


### II.1. Wpisywanie macierzy do WolframAlpha ogólnie.


Macierze generalnie wpisujemy do WolframAlpha korzystając ze znaczków  :


**{{ELEMENTY WIERSZA 1 PRZEDZIELONE PRZECINKAMI},  
{ELEMENTY WIERSZA 2 PRZEDZIELONE PRZECINKAMI },...}**


Np. aby wpisać do WolframAlpha macierz  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$  wpisujemy:

## II.2. Podstawowe działania na macierzach.

Aby dodać macierze używasz po prostu znaku  :

Aby odjąć macierze używasz znaku  :

Aby pomnożyć macierz przez liczbę używasz znaku  :

Aby pomnożyć macierz przez macierz używasz znaku  :

Tutaj trochę gorzej i wchodzi angielski. Trzeba użyć słowa

**transpose(...)**

:

Aby podnieść macierz do potęgi używasz znaku

**^**

:

W WolframAlpha możesz oczywiście wpisywać złożone formuły, pamiętając jednak o nawiasach w odpowiednich miejscach.

$$\text{Liczymy } \left( \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} :$$

$$\text{Liczymy } \left( \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right) :$$

### II.3. Wyznaczniki macierzy.

Wyznacznik macierzy policzysz używając frazy **det** :

### II.4. Macierz odwrotna.

Korzystasz z frazy **inv** :



## II.5. Rząd macierzy.

Używasz frazy **rank** :

Chcesz obliczyć rząd macierzy  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$  :

## II.6. Układy równań liniowych.

Równania przedzielone przecinkiem wpisujemy w nawiasy

**{...}**

używając słowa

**solve**

**solve{RÓWNANIE 1, RÓWNANIE 2,...}**

Zmienne  $x_1, x_2, x_3, \dots$  wpisujemy jako x1, x2, x3,...



## II.7. Inne.

Wpisując samą macierz w WolframAlpha otrzymamy automatycznie dane o jej:

- wymiarze - „Dimensions”,
- wyznaczniku - „Determinant”,
- śladzie - „Trace”,
- wielomianie charakterystycznym - „Characteristic polynomial”,
- wartościach własnych - „Eigenvalues”,
- wektorach własnych - „Eigenvectors”,
- macierzy odwrotnej - „Inverse”.

## III. Liczby Zespólone.

### III.1. Wpisywanie liczb zespolonych do WolframAlpha ogólnie.

Liczby zespolone wpisujesz do WolframAlpha „normalnie” w postaci kartezjańskiej/algebraicznej, tzn. np.:  $2+5i$ .


### III.2. Podstawowe działania na liczbach zespolonych w postaci kartezjańskiej/algebraicznej.

Dodajesz i odejmujesz wpisując liczby zespolone w nawiasie i używając znaków:



Mnożysz lub dzielisz wpisując liczby zespolone w nawiasie i używając znaku:



Potęgujesz liczby zespolone używając znaku  :

Pierwiastki drugiego stopnia liczysz podnosząc do potęgi  $\frac{1}{2}$ , czyli

**$^{(1/2)}$**

lub formułą  **$\text{sqrt}(\dots)$**  :

Pierwiastki wyższych stopni liczysz podnosząc do odpowiedniej potęgi

**UWAGA !**

WolframAlpha pokazuj tylko jeden pierwiastek z liczby, a tych, jak [wiadomo](#), jest tyle, ile stopni pierwiastka.

Aby WolframAlpha obliczył wszystkie możliwe pierwiastki, zamiast pierwiastka można wpisać

równoważne mu równanie zespolone, używając frazy **solve(...)** czyli:

Zamiast  $\sqrt{3-4i}$  wpisać:  $z^2 = 3-4i$

Zamiast  $\sqrt[4]{1+i}$  wpisać:  $z^4 = 1+i$

**Moduł liczby zespolonej**

Wpisujesz liczbę zespoloną w pionowe nawiasy **|...|** (możesz je znaleźć u siebie na

klawiaturze), lub używając frazy **modulus(...)** :



## Sprzężenie liczby zespolonej

Używasz frazy **conjugate(...)** :

## Równania zespolone w postaci kartezjańskiej

Wpisujesz równanie wraz z frazą **solve(...)** . Części rzeczywiste i urojone oznaczasz

(jeśli jest taka potrzeba) frazami **Re(...)** i **Im(...)** .



### III.3. Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej.

#### Przekształcanie na postać trygonometryczną

Aby przekształcić liczbę na postać trygonometryczną, wpisujesz ją po prostu do WolframAlpha i odczytujesz moduł (oznaczony znakiem  $r$ ) i argument liczby (oznaczony jako  $\theta$ ) z rozdziału „Polar coordinates”.

Wiadomo, że liczba zespolona ma postać:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , musisz też odpowiednio przekształcić odpowiednie kąty (np.  $-120^\circ = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ ).

### Działania na liczbach w postaci trygonometrycznej

Używasz tych samych znaków  $+ - * / ^$ , co w postaci kartezjańskiej/algebraicznej, pamiętając o nawiasach. Liczbę  $\pi$  wpisujesz jako **pi**. Wynik otrzymujesz w postaci kartezjańskiej, ale możesz odczytać współczynniki do postaci trygonometrycznej z pola „Polar coordinates”:

## Bardziej złożone działania

Wpisujesz działanie po prostu w WolframAlpha. Np. kiedy chcesz policzyć  $\frac{(-\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+\sqrt{3}i)^4}$  wpisujesz:

### Równania wielomianowe

Wpisujesz równanie w WolframAlpha i rozwiązania równania odczytujesz z pól „Real solutions” i „Complex solutions”.

### Liczby zespolone na płaszczyźnie

Żeby zobaczyć reprezentację geometryczną liczby zespolonej na płaszczyźnie wystarczy wpisać ją i sprawdzić pole „Position in complex plane”:

### Postać wykładnicza liczby zespolonej

Aby odczytać postać wykładniczą liczby zespolonej wpisujesz ją i odczytujesz moduł (oznaczony znakiem  $r$ ) i argument liczby (oznaczony jako  $\theta$ ) z rozdziału „Polar coordinates”.

Wiesz, że liczba zespolona ma postać:  $z = re^{i\theta}$ , musisz też odpowiednio przekształcić odpowiednie kąty (np.  $-120^\circ = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ ).

Równania wpisujemy w nawiasie z frazą **solve(...)** :





## IV. Geometria Analityczna.

### Uwagi ogólne o wpisywaniu wektorów

Wektory generalnie wpisujesz w nawiasach  $\{\dots\}$  np.  $\{-1,2,3\}$ .

W niektórych przypadkach (odejmowanie) możesz trochę pomóc WolframAlpha, wpisując frazę  $\text{vector}\{\dots\}$ , np.  $\text{vector}\{-1,2,3\}$ .

### IV.1. Działania na wektorach.

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez stałą wpisujesz normalnie w WolframAlpha przy pomocy symboli  $+$ ,  $-$  i  $*$ . Jedyne w przypadku odejmowania wpisując

wektory trzeba użyć dodatkowo frazy  $\text{vector}$ , żeby WolframAlpha „zrozumiał”:

Mnożenie skalarne oznaczasz znakiem  $\cdot$ .

Mnożenie wektorowe oznaczasz znakiem  $\times$ :

Mnożenie mieszane to (z [definicji](#)) mnożenie skalarne iloczynu wektorowego przez inny wektor, musisz tylko uważać, gdzie dajesz nawiasy (najpierw musi być wektorowe, później skalarne).

Na przykład jeśli chcesz policzyć iloczyn mieszany  $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ , gdzie

$\vec{a} = [3, 3, -3]$ ,  $\vec{b} = [5, -2, 11]$ ,  $\vec{c} = [2, 2, 0]$  wpisujesz:

Możesz również, jak [wiesz](#), wpisać jego współrzędne w wyznacznik:

## Długość wektora

Fraza:

**length vector{...}**

## Kąt pomiędzy wektorami

Używasz frazy

**VectorAngle {...} {...}**

i współrzędnych wektorów w nawiasach:

## Wektor kierunkowy

Używasz frazy

**unitvector {...}**

i podajesz współrzędne wektora, do którego

kierunkowy chcemy wyliczyć:

## Rzut wektora na inny wektor (lub oś o kierunku wektora)

Używasz frazy:

**projection {wektor KTÓRY RZUCAMY}  
onto {wektor NA KTÓRY RZUCAMY}****UWAGA !**Kolejność wpisywania frazy ma  
znaczenie

Dane o trójkącie

Wpisujemy frazę

**triangle (...) (...) (...)**

i w zwykłych nawiasach współrzędne

punktów-wierzchołków. Z wyniku możemy odczytać:

- wykres - „visual representation”,
- długości krawędzi - „edge lengths”,
- pole - „area”,
- obwód - „perimeter”,
- kąty - „interior angles”.

## IV.2. Płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty lub wektory

Używasz frazy **plane**. Współrzędne wektora wpisujesz razem z frazą **vector**,  
współrzędne punktów w nawiasach, albo – jeśli trzeba – z frazą **through** :



### IV.3. Proste.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Używasz frazy

**line**

. Współrzędne punktów wpisujesz w nawiasach

**(...)**

Otrzymujesz wynik w postaci parametrycznej.

## V. Granice.

Wpisujesz frazę:

**limit {DOLNY INDEKS GRANICY (TO, CO JEST POD lim) }  
WYRAŻENIE, Z KTÓREGO GRANICĘ LICZYMY**

Zamiast pisać „n dąży do nieskończoności” używasz strzałki ze znaków

**->**

albo frazy

**to**



. Nieskończoność to

**infinity**


.



### Granice jednostronne

Aby policzyć granicę jednostronną, dopisujesz  albo  z prawej strony liczby pod limesem:

## VI. Pochodne funkcji.

Aby policzyć pochodną z jakiegoś wyrażenia wpisujesz je w nawiasie i dodajemy znak  :

  $(...)'$



## *VII. Badanie przebiegu zmienności funkcji.*

Równanie stycznej

Wpisujemy frazę:

**tangent line to KRZYWA, DO KTÓREJ STYCZNĄ LICZYMY at  
WSPÓŁRZĘDNA x-SOWA PUNKTU, W KTÓRYM STYCZNĄ LICZYMY**

Normalna

Wpisujemy frazę:

**normal line to KRZYWA, DO KTÓREJ STYCZNĄ LICZYMY at  
WSPÓŁRZĘDNA x-SOWA PUNKTU, W KTÓRYM STYCZNĄ LICZYMY**

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Wpisujemy wzór na funkcję w WolframAlpha. Możemy z miejsca odczytać z niego dużo informacji:

- dziedzinę - „Domain”,
- zbiór wartości - „Range”,
- punkty przecięcia z osią OX - „Roots”.



Wykres możemy też sobie obejrzeć (trzeba ustawić opcję „real-valuated plot”) i odczytać z niego dużo informacji.

Przy odczytywaniu dziedziny trzeba pamiętać, że „or” oznacza „lub”.

## Asymptoty

Używamy frazy:

**asymptotes WYRAŻENIE, KTÓREGO ASYMPTOTY LICZYMY**

Wyniki trzeba nieco zinterpretować.

Asymptoty pionowe odczytujemy z pola „Vertical Asymptote”. Pole to pojawia się tylko wtedy, gdy asymptoty istnieją.

Jeśli mamy np.  $x \rightarrow 1$ , wiemy, że równaniem asymptoty jest  $x=1$ . To, czy jest to asymptota lewo, czy prawostronna możemy odczytać z wykresu.

Asymptoty poziome odczytujemy z pola Horizontal Asymptote.

Jeśli mamy np. WYRAŻENIE FUNKCJI  $\rightarrow 0$ , to znaczy, że asymptotą poziomą funkcji jest  $y=0$  (trzeba jeszcze odczytać, czy jest to asymptota przy  $x$  dążąca do  $+$  czy  $-$  nieskończoności).

Asymptoty ukośne odczytujemy z pola „Oblique Asymptote”. Możemy odczytać z niego równanie prostej, będące asymptotą ukośną.

Wszystko widać też na wykresie.

### Ekstrema

Wpisujemy wyrażenie funkcji w WolframAlpha i wyniki odczytujemy z pól „Local maximum” i „Local minimum”.

### Monotoniczność, wklęsłość wypukłość

Wpisujemy wyrażenie funkcji do WolframAlpha i odczytujemy z wykresu.

Ekstrema globalne

Używamy formuły:

**maximum (lub minimum) WYRAŻENIE FUNKCJI from  
DOLNA GRANICA PRZEDZIAŁU, W KTÓRYM LICZYMY to  
GÓRNA GRANICA PRZEDZIAŁU, W KTÓRYM LICZYMY**

## VIII. Całki nieoznaczone.

Musisz użyć frazy:

**integrate WYRAŻENIE FUNKCJI, Z KTÓREJ CAŁKĘ CHCESZ POLICZYĆ**

„dx” możesz pominąć:

### **UWAGA !**

Wyniki WolframAlpha czasami różnią się pozornie od tych uzyskanych przy pomocy „ręcznych” obliczeń. Częstym źródłem problemów są wartości bezwzględne w argumentach logarytmów i funkcje hiperboliczne.

Tu możesz znaleźć więcej na ten temat: [Funkcje Hiperboliczne](#), [Całki Nieoznaczone](#)

### **UWAGA !**

Klikając na przycisk „Show steps” w polu wyniku możemy zobaczyć, jak WolframAlpha liczył całkę krok po kroku!

## *IX. Całki oznaczone, niewłaściwe i zastosowania całek.*

Aby obliczyć całkę oznaczoną używamy frazy:

**integrate(WYRAŻENIE,DOLNA GRANICA CAŁKOWANIA,  
GÓRNA GRANICA CAŁKOWANIA)**

Całki niewłaściwe liczymy tak samo, zamiast nieskończoności w granicach całkowania wpisujemy **infinity**.

Rezultat „integral does not converge” znaczy, że całka jest rozbieżna.

### Rysowanie wykresów

Do liczenia pól obszarów przydaje się narywanie wykresu linii ograniczających obszar. Możemy zrobić to używając frazy:

**plot WYRAŻENIA FUNKCJI PRZEDZIELONE PRZECINKAMI**



Pola obszarów

Używasz frazy:

**area between FUNKCJE OGRANICZAJĄCE POLE ODDZIELONE  
PRZECINKAMI, EWENTUALNE OGRANICZENIA x JAKO x  
from DOLNA GRANICA to GÓRNA GRANICA**







Długość łuku

Używamy frazy

**arc length**

:

Krzywe w postaci parametrycznej

Chcąc narysować krzywą w postaci parametrycznej, używamy frazy:

**parametric plot WYRAŻENIA ZMIENNYCH PRZY POMOCY  
PARAMETRU  $t$  PRZEDZIELONE PRZECINKAMI  $t$  from  
DOLNA GRANICA  $t$  to GÓRNA GRANICA  $t$**

### Krzywe w postaci biegunowej

Chcąc narysować wykres krzywej w postaci biegunowej używamy frazy:

**polar plot WYRAŻENIE KRZYWEJ**

Kąt  $\varphi$  możesz wpisać jako phi, a  $\rho$  jako r.

## X. Funkcje wielu zmiennych.

### X.1. Pochodne cząstkowe.

Aby policzyć pochodną cząstkową np. po x wpisujemy formułę:

**d/dx(WYRAŻENIE FUNKCJI, KTÓRĄ CHCEMY POLICZYĆ)**

Jeśli chcemy policzyć np. po y używamy oczywiście d/dy.

Jeśli chcemy policzyć np. pochodną trzeciego rzędu  $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$  z funkcji  $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$

bierzemy kolejne pochodne w nawiasy, pamiętając o kolejności, czyli wpisujemy odpowiednik

wyrażenia  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\text{WYRAŻENIE}) \right) \right)$ :



## X.2. Ekstrema funkcji.

Wpisujemy w WolframAlpha wyrażenie funkcji. Ekstrema odczytujemy z pól:

- **ekstrema lokalne** - „Local minimum/maximum”,
- **ekstrema globalne** - „Global minimum/maximum”.

**UWAGA !**

Jeżeli nie zaznaczymy żadnej dziedziny, czyli obszaru, w którym liczymy ekstremum każde ekstremum globalne jest jednocześnie ekstremum lokalnym!

**UWAGA !**

Aby obliczyć ekstremum należy rozwiązać odpowiedni układ równań, a później najczęściej policzyć wyznacznik. Można się tu posłużyć WolframAlpha i formułami pokazanymi już w tym ebooku przy macierzach (układy równań i wyznaczniki).

### X.3. Dziedzina funkcji.

Używamy frazy:

**domain WYRAŻENIE, Z KTÓREGO DZIEDZINĘ CHCEMY POLICZYĆ**

Otrzymujemy zbiór dziedziny i jej wykres.



## X.4. Funkcje uwikłane.

Żeby policzyć pochodną używamy formuły:

**derivative RÓWNANIE UWIKŁANE FUNKCJI, KTÓREJ  
POCHODNĄ UWIKŁANĄ CHCEMY POLICZYĆ**

Żeby policzyć styczną wpisujemy frazę:

**tangent line to RÓWNANIE FUNKCJI UWIKŁANEJ, DO KTÓREGO  
STYCZNĄ LICZYMY at  $x$ =WSPÓŁRZĘDNA  $x$ -SOWA PUNKTU,  
W KTÓRYM STYCZNĄ LICZYMY**

Żeby policzyć normalną wpisujemy frazę:

**normal line to RÓWNANIE FUNKCJI UWIKŁANEJ, DO KTÓREGO  
STYCZNA LICZYMY at  $x$ =WSPÓŁRZĘDNA  $x$ -SOWA PUNKTU,  
W KTÓRYM STYCZNA LICZYMY**

## *XI. Całki wielokrotne.*

### XI.1. Całki podwójne.

Aby policzyć całkę podwójną używamy formuły:

**integrate WYRAŻENIE FUNKCJI, Z KTÓREJ CAŁKĘ CHCEMY POLICZYĆ  
for NAZWA ZMIENNEJ from DOLNA GRANICA TEJ ZMIENNEJ to GÓRNA  
GRANICA TEJ ZMIENNEJ for NAZWA DRUGIEJ ZMIENNEJ from DOLNA  
GRANICA TEJ ZMIENNEJ to GÓRNA GRANICA TEJ ZMIENNEJ**

Wykresy obszarów możemy narysować formułą:

**plot NIERÓWNOŚCI OGRANICZAJĄCE PIERWSZĄ ZMIENNĄ,  
NIERÓWNOŚCI OGRANICZAJĄCE DRUGĄ ZMIENNĄ**

## XI.2. Całki potrójne.

Aby policzyć całkę potrójną używasz formuły:

**integrate WYRAŻENIE FUNKCJI, Z KTÓREJ CAŁKĘ CHCESZ POLICZYĆ,  
for NAZWA ZMIENNEJ from DOLNA GRANICA TEJ ZMIENNEJ to GÓRNA  
GRANICA TEJ ZMIENNEJ, for NAZWA DRUGIEJ ZMIENNEJ from DOLNA  
GRANICA TEJ ZMIENNEJ to GÓRNA GRANICA TEJ ZMIENNEJ, for NAZWA  
TRZECIEJ ZMIENNEJ from DOLNA GRANICA TEJ ZMIENNEJ to GÓRNA  
GRANICA TEJ ZMIENNEJ**

### **UWAGA !**

Nazwami zmiennych mogą być także kąty.  $\varphi$  piszemy jako **phi** , a  $\psi$  jako

**psi** . Takich zmiennych używamy np. w podstawieniach sferycznych.



## *XII. Elementy teorii pola.*

### **XII.1. Gradient.**

Chcąc policzyć gradient używasz frazy:

**grad WYRAŻENIE FUNKCJI, KTÓREJ GRADIENT CHCESZ POLICZYĆ**

## XII.2. Dywergencja.

Chcąc policzyć dywergencję używasz frazy:

**div POLE WEKTOROWE, KTÓREGO DYWERGENCJĘ CHCESZ POLICZYĆ**

## XII.2. Rotacja.

Chcąc policzyć rotację używasz frazy:

**rot POLE WEKTOROWE, KTÓREGO ROTACJĘ CHCESZ POLICZYĆ**

### XII.3. Laplasjan.

Chcąc policzyć laplasjan używasz frazy:

**laplacian WYRAŻENIE FUNKCJI, KTÓREJ LAPLASJAN CHCESZ POLICZYĆ**

## *XIII. Równania różniczkowe.*

Równanie wpisujesz po prostu w WolframAlpha. Pochodną możemy wpisać jako  $\mathcal{Y}'$ , albo  $\frac{dy}{dx}$ .  
Warunki początkowe możesz wpisać po przecinku.



**UWAGA !**

Po kliknięciu na pole „Step-by-step solution” koło rozwiązania możesz obejrzeć rozwiązywanie równania krok po kroku.

## *XIV. Szeregi.*

### XIV.1. Szeregi liczbowe.

Wpisujesz formułę:

**sum[WYRAŻENIE SZEREGU,DOLNY INDEKS SZEREGU,  
GÓRNY INDEKS SZEREGU]**

WolframAlpha podaje nam zbieżność, jakim kryterium ją oszacował, sumę szeregu, wzór na ciąg sum częściowych. Jeśli suma szeregu równa jest liczbie, szereg jest zbieżny („the series converges”). Jeśli przy sumie szeregu pojawia się napis „sum does not converge” – szereg jest rozbieżny.



**UWAGA !**

WolframAlpha nie radzi sobie z niektórymi szeregami. Np. w polu „Result” może pojawić się napis, że suma rozbiega, a w polu z kryteriami napis, że według któregoś kryterium szereg jest zbieżny. Czasami potrzebuje więcej czasu do obliczeń (co wymaga dokupienia płatnej wersji PRO).

## XIV.2. Szeregi funkcyjne.

Wpisujemy formułę:

**sum[WYRAŻENIE SZEREGU,DOLNY INDEKS SZEREGU,  
GÓRNY INDEKS SZEREGU]**

W polu „Result” WolframAlpha podaje nam, gdzie szereg jest zbieżny (obszar zbieżności). W polu „Infinite sum” możemy odczytać sumę (czasami).



### XIV.3. Szeregi Taylora i Maclaurina.

Aby rozwinąć funkcję w szereg Taylora używamy frazy:

**series WYRAŻENIE FUNKCJI at point  $x$ =PUNKT,  
W OTOCZENIU KTÓREGO ROZWIJAMY**

W przypadku szeregu Maclaurina punktem, w którym rozwijamy będzie oczywiście 0.



## *XV. Prawdopodobieństwo.*

Dwumian Newtona

Dwumian Newtona obliczymy frazą:

**binomial(GÓRNA LICZBA, DOLNA LICZBA)**

Tak opisanego dwumianu możesz używać także w bardziej złożonych wyrażeniach.

### Rozkład normalny

Chcąc obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa  $X$  przyjmie wartości pomiędzy  $a$  i  $b$  przy rozkładzie normalnym z parametrami  $m$  i  $\sigma$  używamy frazy:

**Probability[PRZEDZIAŁ  $X, X \sim \text{NormalDistribution}$ [PARAMETRY  
ROZKŁADU PRZEDZIELONE PRZECINKAMI]]**



## *Streszczenie fraz do wpisywania w WolframAlpha.*

### Macierze

Nazwa	Polecenie	Strona
Dodawanie	<b>+</b>	12
Odejmowanie	<b>-</b>	12
Mnożenie	<b>*</b>	13
Transponowanie	<b>transpose</b>	14
Potęgowanie	<b>^</b>	14
Wyznacznik	<b>det</b>	16
Macierz odwrotna	<b>inv</b>	16
Rząd	<b>rank</b>	17
Układy równań	<b>solve</b>	17

### Liczby zespolone

Nazwa	Polecenie	Strona
Dodawanie	<b>+</b>	20
Odejmowanie	<b>-</b>	20
Mnożenie	<b>*</b>	21
Dzielenie	<b>\</b>	21
Potęgowanie	<b>^</b>	22



Pierwiastek	<b>sqrt</b>	23
Moduł	<b>modulus</b>	24
Sprzężenie	<b>conjugate</b>	25
Równanie	<b>solve</b>	25

## Geometria analityczna

Nazwa	Polecenie	Strona
Wektor	<b>vector</b>	34
Dodawanie	<b>+</b>	34
Odejmowanie	<b>-</b>	34
Mnożenie przez liczbę	<b>*</b>	34
Mnożenie skalarne	<b>.</b>	35
Mnożenie wektorowe	<b>x</b>	35
Długość wektora	<b>length vector</b>	37
Kąt między wektorami	<b>VectorAngle</b>	37
Wektor kierunkowy	<b>unitvector</b>	38
Rzut	<b>projection ... onto ...</b>	38
Trójkąt	<b>triangle</b>	39
Płaszczyzna	<b>plane</b>	40
Prosta	<b>line</b>	41

## Granice

Nazwa	Polecenie	Strona
Granica	<b>limit</b>	42

## Pochodne

Nazwa	Polecenie	Strona
Pochodne	'	45

## Badanie przebiegu zmienności

Nazwa	Polecenie	Strona
Styczna	<b>tangent line to ... at ...</b>	47
Normalna	<b>normal line to ... at ...</b>	48
Dziedzina	<b>domain</b>	48
Asymptoty	<b>asymptotes</b>	50
Najmniejsze/największe wartości	<b>minimum/maximum ... from ... to ...</b>	53

## Całki nieoznaczone

Nazwa	Polecenie	Strona
Całka nieoznaczona	<b>integrate</b>	54

## Całki oznaczone i zastosowania

Nazwa	Polecenie	Strona
Całka nieoznaczona	<b>integrate</b>	55
Wykres	<b>plot</b>	56
Pole pomiędzy	<b>area between</b>	57
Długość łuku	<b>arc length</b>	61
Wykres parametryczny	<b>parametric plot</b>	62
Wykres biegunowy	<b>polar plot</b>	63

## Funkcje wielu zmiennych

Nazwa	Polecenie	Strona
Pochodna cząstkowa	<b>d/dx, d/dy, ...</b>	64
Dziedzina	<b>domain</b>	66
Pochodna funkcji uwikłanej	<b>derivative</b>	68
Styczna	<b>tangent line to ... at ...</b>	68
Normalna	<b>normal line to ... at ...</b>	69
Wykres biegunowy	<b>polar plot</b>	69

## Całki wielokrotne

Nazwa	Polecenie	Strona
Całka podwójna i potrójna	<b>integrate</b>	70
Wykres	<b>plot</b>	71

## Elementy teorii pola

Nazwa	Polecenie	Strona
Gradient	<b>grad</b>	73
Dywergencja	<b>div</b>	74
Rotacja	<b>rot</b>	75
Laplasjan	<b>laplacian</b>	76

## Szeregi

Nazwa	Polecenie	Strona
Szereg	<b>Sum</b>	80
Rozwinięcie Taylora	<b>Series</b>	83

## Prawdopodobieństwo

Nazwa	Polecenie	Strona
Dwumian Newtona	<b>binomial</b>	85
Prawdopodobieństwo w rozkładzie normalnym	<b>Probability[..., X~NormalDistribution[...]]</b>	86

Wszelkie znaki występujące w treści niniejszego ebooka są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor dołożył wszelkich starań, aby zawarte w tym ebooku informacje były kompletne i rzetelne. Nie bierze on jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie zastrzeżonych znaków towarowych lub autorskich. Autor nie ponosi również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w niniejszym ebooku.

**Autor: Krystian Karczyński**

eTrapez Usługi Edukacyjne E-Learning

Krystian Karczyński

ul. Wyszyńskiego 48/36

72-009 Police

email: [k.karczynski@etrapez.pl](mailto:k.karczynski@etrapez.pl)

[www.etrapez.pl](http://www.etrapez.pl)

**Skład i opracowanie:**

Agencja Informacji i Promocji ProINFO

ul. Sowińskiego 78/201

70-236 Szczecin

email: [biuro@proinfo.co](mailto:biuro@proinfo.co)

[www.proinfo.co](http://www.proinfo.co)



## Co teraz?

Ten ebook to tylko wstęp do mojego całego Kursu Video na temat WolframaAlpha. Jeśli otrzymałeś go ode mnie i wpisałeś się przy okazji na listę adresową tego Kursu wystarczy już teraz poczekać, aż maile z kolejnymi częściami Kursu będą spływać na Twoją skrzynkę mailową.

Jeśli jakimś trafem nie jesteś jeszcze na tej liście adresowej, zapisz się koniecznie: [www.etrapez.pl/wolframalpha](http://www.etrapez.pl/wolframalpha)

...aby otrzymywać ode mnie **darmowe** filmiki video o tym, jak możesz wykorzystać WolframAlpha do swojej nauki na studiach.

Jeśli zaś cały ebook podobał Ci się, podziel się nim ze znajomymi:

*Krystian Karczyński*



**Jeśli nie jesteś moim subskrybentem**

**Zapisz się!!!**

**aby otrzymywać ode mnie darmowe video kursy dotyczące WolframAlpha.**